
CB n°2

Mathématiques - 16 Décembre 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 2 exercices et 1 problème tous indépendants.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3} .
2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit M une matrice de E_A . Montrer que tM appartient à E_A .
4. Dans cette question, on considère les vecteurs $u = (1, 2, -2)$, $v = (2, 1, 2)$ et $w = (-2, 2, 1)$ et on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice A .
 - (a) Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et vérifier qu'il existe trois réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $f(u) = \lambda_1 u$, $f(v) = \lambda_2 v$ et $f(w) = \lambda_3 w$.
 - (b) Montrer que la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 - (d) Justifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et vérifie $A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$
(on ne demande pas de calculer P^{-1} dans cette question).
 - (e) Calculer P^2 et en déduire P^{-1} .

Dans toute la suite on pose $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on admet que $A = PDP^{-1}$.

5. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que N appartient à E_D
si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - (b) En déduire une base $\mathcal{E}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D .
6. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
Montrer que M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D
 - (b) En déduire une base de E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{E}$.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(A + M)^2 = A^2 + M^2$.
On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M
8. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(M) = AM + MA$.
En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ .

Exercice 2

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$, et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) - x$.
(b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. (a) Démontrer : $\forall x \in [2; +\infty[, \quad 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$
(c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Problème 1

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Un entraîneur cherche un nouveau joueur pour son équipe de basket parmi n candidats potentiels qui lui sont présentés. Tous les candidats sont de taille différente, il y en a donc exactement un qui est plus grand que tous les autres (nous l'appellerons naturellement **le joueur le plus grand**), celui que l'entraîneur cherche absolument à recruter.

L'entraîneur voit chacun des candidats un par un dans un ordre choisis uniformément au hasard. A chaque candidat qu'il voit, il peut choisir de le sélectionner, auquel cas la sélection s'arrête, soit renvoyer ce candidat et voir le suivant. Une fois qu'un candidat est renvoyé, il ne peut pas revenir.

L'entraîneur ne connaît pas à l'avance les tailles des candidats ni même la taille maximale possible. Il connaît seulement le nombre total n de candidats.

Le but de ce problème est d'établir une stratégie qui maximise la probabilité de sélectionner le joueur le plus grand. On dira que l'entraîneur **a gagné** s'il sélectionne le joueur le plus grand. On notera dans tout le problème G_n l'événement « l'entraîneur a gagné » et on note X_n la variable aléatoire égale au rang du joueur le plus grand dans l'ordre de passage des candidats. Ainsi X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X_n = k) = \frac{1}{n}$.

Pour tout entier k entre 0 et $n - 1$, on note $\mathcal{S}(k)$ la stratégie suivante :

- L'entraîneur laisse passer les candidats 1 à k et ne sélectionne aucun d'entre eux.
- A partir du $k + 1$ -ème candidat, il garde le premier candidat qui est plus grand que tous les candidats passés avant lui.

Note : la stratégie est fixée avant le début de la sélection, elle n'est pas choisie aléatoirement et $\mathcal{S}(k)$ n'est donc pas un événement mais simplement une notation pour désigner la stratégie choisie.

Partie I - Étude de plusieurs cas particulier

1. On suppose dans cette question que $n = 2$. Dans ce cas, la stratégie $\mathcal{S}(0)$ consiste à toujours choisir le premier candidat, et la stratégie $\mathcal{S}(1)$ consiste à toujours choisir le deuxième candidat après avoir renvoyé le premier.

Que vaut $P(G_2)$ si l'entraîneur choisit la stratégie $\mathcal{S}(0)$? Et s'il choisit la stratégie $\mathcal{S}(1)$?

2. On suppose dans cette question que $n = 3$. Dans ce cas :

- $\mathcal{S}(0)$ consiste à toujours choisir le premier candidat.
- $\mathcal{S}(1)$ consiste à toujours laisser passer le premier candidat, puis choisir le deuxième s'il est plus grand que le premier, et le troisième sinon.
- $\mathcal{S}(2)$ consiste à toujours laisser passer les deux premiers candidats et à choisir le troisième.

(a) Justifier que $P(G_3) = \frac{1}{3}$ avec les stratégies $\mathcal{S}(0)$ et $\mathcal{S}(2)$.

(b) Calculer $P(G_3)$ avec la stratégie $\mathcal{S}(1)$ et vérifier que $P(G_3) > \frac{1}{3}$. On en conclut que pour $n = 3$ il existe bien une stratégie optimale parmi les stratégies proposées.

Partie II - Étude des stratégies dans le cas général

On considère dans cette partie que le nombre de candidats est un entier n avec $n \geq 4$. On note alors pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $p_{n,k}$ la probabilité que l'entraîneur gagne avec la stratégie $\mathcal{S}(k)$, c'est à dire $p_{n,k} = P(G_n)$.

3. Justifier que $p_{n,0} = \frac{1}{n}$.

On écarte la stratégie $\mathcal{S}(0)$ dans toute la suite. On considère donc un entier k compris entre 1 et $n - 1$ et **on s'intéresse à la stratégie $\mathcal{S}(k)$**

4. Soit j un entier compris entre 1 et n . On s'intéresse à la probabilité de gagner lorsque le plus grand joueur est le numéro j , c'est à dire lorsque que l'événement $[X_n = j]$ est réalisé.

(a) Montrer que si $j \leq k$, alors $P_{[X_n=j]}(G_n) = 0$.

On suppose dans les questions suivantes que $j > k$.

(b) Combien existe-t-il de façon d'ordonner $j - 1$ candidats ?

(c) Combien existe-t-il de façon d'ordonner $j - 1$ candidats de sorte que le plus grand d'entre eux soit l'un des k premiers ?

(d) En déduire que si $j > k$, alors $P_{[X_n=j]}(G_n) = \frac{k}{j-1}$.

(e) Justifier que la famille d'événements $([X_n = j])_{1 \leq j \leq n}$ forme un système complet d'événements.

(f) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout entier k compris entre 1 et $n - 1$ on a :

$$p_{n,k} = \frac{k}{n} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{j}$$

Partie III - Choix de la meilleure stratégie

n est toujours un entier fixé, avec $n \geq 4$, et $p_{n,k}$ vérifie l'égalité trouvée à la question 5.

5. Étude de la suite $(p_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$.

(a) Montrer que pour tout entier k compris entre 0 et $n - 2$ on a :

$$p_{n,k+1} - p_{n,k} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{1}{j} \right) - 1 \right]$$

On note $d_{n,k} = p_{n,k+1} - p_{n,k}$.

(b) Montrer que la suite $(d_{n,k})_{0 \leq k \leq n-2}$ est strictement décroissante.

(c) En déduire qu'il existe un entier $s(n)$ tel $p_{n,k+1} - p_{n,k}$ est positif pour $k < s(n)$ et strictement négatif pour $k \geq s(n)$, et que :

$$s(n) = \inf \left\{ k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \left| \sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{1}{j} < 1 \right. \right\}$$

En déduire que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $p_{n,k} \leq p_{n,s(n)}$. La stratégie $S_{s(n)}$ est donc celle qui maximise la probabilité de gain de l'entraîneur.

Partie IV - Estimation de la probabilité de gain maximale

Dans cette partie on cherche à déterminer la valeur $s(n)$ qui donne la stratégie optimale pour n joueurs **lorsque n est grand**.

-
6. Soit j un entier compris entre 1 et $n - 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln$ sur l'intervalle $[j, j + 1]$ montrer que :

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

7. En déduire que pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$ on a :

$$\ln\left(\frac{n}{k+1}\right) \leq \sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{1}{j} \leq \ln\left(\frac{n-1}{k}\right)$$

8. En déduire que $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor - 1 < s(n) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{e} \right\rfloor + 1$

9. Montrer finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(n)}{n} = \frac{1}{e}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n,s(n)} = \frac{1}{e}$

En conclusion, lorsque n est grand, la stratégie optimale consiste à laisser passer une proportion $\frac{1}{e}$ de candidat, soit environ 37%, avant de choisir le candidat meilleur que tous les précédents. La probabilité d'obtenir le meilleur de tous les candidats avec cette stratégie est aussi égale à environ $\frac{1}{e}$, c'est à dire 0,37.